

Problème 297 – Les écureuils de Hyde Park

Niveau : Terminale (Spécialité Maths)

Chapitres : Fonction exponentielle, Limites, Suites, Intégration, Algorithmique

Inédit, publié le 07/05/2021



Lors des dernières vacances d'avril, Juliette, une élève de Terminale, a eu la chance d'être invitée par ses grands-parents, qu'elle adore, pour visiter Londres au sein d'un groupe de voyage⁽¹⁾. Elle a pu ainsi partager le bonheur d'admirer les plus beaux sites : Big Ben, London Eye, l'Abbaye de Westminster etc... Elle a aussi profité d'une magnifique balade dans Hyde Park, le plus grand parc du centre de Londres, où son groupe de voyage n'a pas pu éviter la présence répétée d'écureuils.

Tout se serait bien passé si la vitesse de marche du groupe n'avait pas été systématiquement ralentie par la présence de ces adorables créatures que l'on veut admirer, photographier (surtout pas nourrir!)... Juliette, pensant initialement que la vitesse de marche du groupe était à peu près inversement proportionnelle au nombre d'écureuils, a fini, avec beaucoup d'imagination, par établir un modèle qui extrapole cette vitesse, en km/h, en fonction du nombre d'écureuils n rencontrés.

Juliette a ainsi traduit cette vitesse par la suite (v_n) donnée, pour $n \geq 0$, par:

$$v_n = f(n) \text{ avec } f(x) = (x^2 + 5)e^{-0,6x}, \text{ où } f \text{ est définie sur } [0, +\infty[.$$

- 1) a) Quelle est la signification de $v_0 = f(0)$ dans ce modèle?
b) Vérifier que dans ce modèle, la vitesse du groupe n'est pas inversement proportionnelle au nombre d'écureuils.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 3) a) Montrer que f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.
b) En déduire le sens de variation de (v_n) , puis que (v_n) est une suite convergente.

4) Expliquer à quoi sert le programme Python ci-dessous, et ce qu'il affichera quand il est exécuté.

```
from math import *  
n=0  
v=5  
while v>=1:  
    n=n+1  
    v=(n**2+5)*exp(-0.6*n)  
print(n)
```

5) Juliette estime qu'un groupe de voyage qui traverse Hyde Park va généralement rencontrer de 1 à 5 écureuils sur son chemin. Elle pense ainsi que la valeur V représentant le mieux la vitesse moyenne d'un groupe à travers le parc peut être estimée par la formule :

$$V = \frac{1}{4} \int_1^5 f(t) dt.$$

a) En détaillant les calculs, calculer V .

Indication : on pourra procéder à une double intégration par parties.

b) Donner une valeur approchée de V en km/h, arrondie au centième près.

(1) Petit clin d'œil à l'association [Arts & Vie](#) pour ce voyage...